MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
08 februarie 2025

Clasa a V-a

Subiectul 1.

a) Calculați suma cifrelor numărului $n = 2025 + 2025 \cdot 3 + 2025 \cdot 5 + ... + 2025 \cdot 19$.

b) Determinați produsul numerelor a, b şi c ştiind că

$$a \cdot b = 225,\ b \cdot c = 729 \text{ şi } a \cdot (b + c) = 2250.$$

(***)

Subiectul 2.

Împărţind numărul natural x la numărul natural nenul y, obţinem câtul 2 şi restul 41.

a) Determinaţi numărul natural n cu proprietatea $10^n = 8(3x - 6y + 2)$.

b) Aflaţi numerele x şi y, ştiind că $x + y \leq 167$.

(***)

Subiectul 3.

Un număr natural se numeşte *cub bipătratic* dacă este cub perfect şi se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule diferite. Un număr natural se numeşte *pătrat bicubic* dacă este pătrat perfect şi se poate scrie ca suma a două cuburi perfecte nenule diferite.

a) Arătaţi că numărul 125 este *cub bipătratic*, iar numărul 9 este *pătrat bicubic*.

b) Arătaţi că există o infinitate de *cuburi bipătratice* şi o infinitate de *pătrate bicubice.*

(***)

Subiectul 4.

a) Arătaţi că $2^{75} < 3^{50}$.

b) Determinaţi cel mai mare număr natural n pentru care $3^{50} > 2^n$.

Supliment G.M. 11/2024

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota cu puncte între 0 şi 7.
Timp de lucru: 3 ore

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

8 februarie 2025

Clasa a VI-a

1. Se consideră numerele raționale x şi y astfel încât $\frac{7x-5y}{4x-6y} = \frac{2}{3}$.

a) Aflați valoarea raportului $\frac{5x}{2y}$.

b) Aflați ce procent reprezintă 3x din (2x + 3y).

2. Fie O mijlocul segmentului AB iar C un punct situat pe mediatoarea segmentului AB (punctul C diferit de punctul O). Punctele M și N sunt situate de aceeași parte cu C față de dreapta AB astfel încât unghiul ∡MON este drept și punctul M este situat în interiorul ∡AOC. Punctul D se află în semiplanul opus determinat de dreapta AB și punctul C astfel încât:
∡ABD ≡ ∡COM.

a) Arătați că ∡AOM ≡ ∡CON.

b) Arătați că dreptele OM si BD sunt perpendiculare.

3. Determinați numerele naturale prime de forma $\overline{ef}$ și numerele naturale nenule a și b care verifică egalitatea : $\overline{ef}^{\,2} = 9 \cdot a \cdot (a,b) + b \cdot [a,b]$, unde (x,y) si [x,y] reprezintă cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale x si y.

(Gazeta Matematică 6-7-8/2024)

4. Spunem despre o mulțime de numere naturale că are proprietatea *"4d"* dacă orice element al său are patru divizori naturali.

a) Scrieți mulțimea cu proprietatea *"4d"* formată din cele mai mici cinci numere naturale.

b) Fie M o mulțime cu proprietatea *"4d"* astfel încât 8 ∈ M. Arătați că, orice elemente ar avea multimea M, suma divizorilor acestor elemente nu poate fi 2024.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
8 februarie 2025

Clasa a VII-a

1.a) Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b, unde

$$a=\sqrt{9+4\sqrt{5}}\,,\; b=\sqrt{9-4\sqrt{5}}.$$

b) Arătați că numărul

$$N=\left[\left(9+4\sqrt{5}\right)^{2025}+\frac{1}{\left(9-4\sqrt{5}\right)^{2027}}\right]\cdot\left(9-4\sqrt{5}\right)^{2026}+\left|3-2\sqrt{3}\right|+\left(\sqrt{3}-1\right)^{2}$$

este prim.

2. a) Calculați partea întreagă și partea fracționară a numărului $\sqrt{13}-4$.

b) Calculați suma $S=\left[\sqrt{1\cdot 2+1}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3+1}\right]+\cdots+\left[\sqrt{99\cdot 100+1}\right]$,

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

3. Fie $ABCD$ un pătrat. Notăm cu M simetricul lui B față de C. Pe semidreapta $[CA$ se consideră punctul N astfel încât $\sphericalangle NMB=30^{o}$. Dreapta MN intersectează AD și BD în punctele P, respectiv Q. Arătați că BP=BQ.

Adrian Bud, Gazeta Matematică nr. 10/2024

4. Fie triunghiul ABC în care $\sphericalangle BAC=60^{o}$ și $\sphericalangle ABC=45^{o}$. Considerăm punctele $D\in(AC)$ și $E,F\in(AB)$ astfel încât $\sphericalangle BDC=75^{o}, BE=DC=2\ cm, \sphericalangle AFD=105^{o}$.

a) Determinați lungimea segmentului *DE*.

b) Dacă *(EM* este bisectoarea unghiului *BED*, $M\in BD$, *(EN* este bisectoarea unghiului *AED*, $N\in AD$, iar $FD\cap EN=\{P\}$, arătați că patrulaterul *DMEP* este dreptunghi.

Gabriel Tica

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa Locală- 2025

clasa a VIII-a

Subiectul 1

Se consideră expresia $E(x)=(x^2-3)(x^2+3)-(2x-1)^2-(3x+1)(x+1)+12$, unde x este număr real.

a) Arată că pentru orice număr natural par a, numărul $A=E(a)+3$ este divizibil cu 4.

b) Determină numerele întregi n pentru care numărul întreg $E(n)$ are valoare minimă.

Subiectul 2

Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$, $VA=AB=12$ cm și $AC\cap BD=\{O\}$. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor BC, respectiv VO.

a) Determină cosinusul unghiului dreptelor AC și MN.

b) Demonstrează că dreapta MN este perpendiculară pe planul (VAD).

Subiectul 3

Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{4}}{1+\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{\sqrt{n+2}}{1+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}=\frac{17+\sqrt{3}}{2}$$

Problema E16960, Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2024

Subiectul 4

Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctul M este proiecția punctului B pe dreapta $A'C$, punctul N este proiecția punctului A pe planul $(A'CD)$ și punctul P este simetricul punctului D față de punctul C.

a) Arată că dreapta CM este perpendiculară pe planul $(C'BD)$.

b) Demonstrează că punctele N, M și P sunt coliniare.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală

Clasa a IX-a

8 februarie 2025

Subiectul 1

Rezolvați ecuația $\left[x+\frac{1}{2}\right]=2[x]-3\{x\}+1$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a și $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a.

Gazeta Matematică nr. 9/2021

Subiectul 2

Determinați numerele reale strict pozitive a, b, c, știind că $a+b+c=1$ și

$$ab+ac+bc=\sqrt{3abc}.$$

Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2024

Subiectul 3

În triunghiul *ABC*, fie *D,E* și respectiv *F* punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile *BC, CA, AB*. Arătați că dacă $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{DC}$, atunci triunghiul *ABC* este echilateral.

Subiectul 4

Numerele reale strict pozitive a, b, c verifică relația $(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)=27$. Arătați că $abc+a^2b+b^2c+c^2a\leq 6$.

Notă. *Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore*

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, Județul Dolj, 8 februarie 2025
CLASA a X-a

Problema 1. a) Dacă a, b, c sunt trei numere reale pozitive pentru care $a^{\log_3 10} = 27$, $b^{\log_5 10} = 125$ și $c^{\log_{15} 5} = 225$, calculați

$$a^{(\log_3 10)^2} + b^{(\log_5 10)^2} + c^{(\log_{15} 5)^2}.$$

b) Fie a și n două numere reale strict pozitive astfel încât $\sqrt{\log_a n} = \log_a \sqrt{n}$ și $a \log_a n = \log_a an$. Să se arate că n este de forma $n = \frac{p}{q}$, unde p, q sunt numere naturale prime între ele și să se găsească valoarea expresiei $\sqrt{p} + \sqrt[4]{p^3} \cdot \sqrt{q}$.

Prof. Popescu Luminița

Problema 2. Fie $a, b, c, d \in (1, \infty)$ cu proprietatea că produsul oricăror trei dintre ele este mai mare decât al patrulea. Arătați că $\log_{\frac{bcd}{a}} a + \log_{\frac{acd}{b}} b + \log_{\frac{abd}{c}} c + \log_{\frac{abc}{d}} d \geq 2$

(***)

Problema 3. Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe de modul 1 care verifică relația $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$. Determinați valoarea maximă a expresiei $E = \left|\frac{z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_3} + \frac{3z_3}{z_1}\right|$.

(***)

Problema 4. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$f(x - y) + f(y) \geq f(x^3 + y^3) + f(x)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Gazeta Matematică Nr.9/2024

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală

Clasa a XI-a

8 februarie 2025

Subiectul 1

Determinaţi matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$.

Subiectul 2

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ şi $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$, $n \geq 1$.

a) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n \cdot (1 - x_n)$.

Subiectul 3

a) Arătați că dacă M este o matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $M^n = O_2$, atunci $M^2 = O_2$.

b) Arătați că există o infinitate de matrice $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}^*)$ care au proprietăţile $X^{2025} = Y^{2025} = O_2$ și $(X - Y)^{2026} = I_2$.

Subiectul 4.

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 > 0$ şi $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{\ln(n + x_n)}$, pentru $n \geq 1$. Aflați limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ şi arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} \cdot x_n = 1$.

Gazeta Matematică, nr. 6-7-8/2024

Notă. *Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore*

MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
08.02.2025

Clasa a XII-a

1. Se consideră mulțimea $M = (-\infty, 1)$. Pentru fiecare pereche $(x, y) \in M \times M$ notăm $x * y = \frac{2024-xy}{2025-x-y}$.

a) Arătați că funcția $(x, y) \to x * y$ definește o lege de compoziție pe M.

b) Demonstrați că legea de compoziție "*" este comutativă și asociativă, dar nu are element neutru.

***

2. Se consideră funcțiile $f, F: (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin 7x}{\sin x}$ și $F(x) = x + \sin 2x + \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin 6x$. Arătați $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + \mathcal{C}$.

***

3. a) Fie $(G,\cdot)$ un grup comutativ cu elementul neutru e și $a \in G, a \neq e, a$ element de ordinul n al grupului G. Arătați că oricare ar fi o funcție $f: G \to G$, funcția $h: G \to G, h(x) = f(x) \cdot f(ax) \cdot \ldots \cdot f(a^{n-1}x)$ nu este injectivă.

***

b) Să se determine toate automorfismele grupului $(\mathbb{Z}, +)$.

***

4. Fie $f: \mathbb{R} \to (1, \infty)$ o funcție derivabilă, iar F este o primitivă a funcției care verifică relația: $F(x) = f^2(x) + 2025 \cdot f(x) + x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

a) Să se studieze monotonia funcției f.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x) + x \cdot f'(x)}{x}$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*